Es 1. Alla fase finale di un concorso sono ammessi 50 candidati, numerati da 1 a 50. La giuria è formata da 20 giurati, che devono obbligatoriamente esprimere due preferenze, senza specificare quale sia l'ordine di preferenza. Ovviamente, le due preferenze di uno stesso giudice non possono andare al medesimo candidato. I giurati hanno le idee molto confuse, e decidano di votare tirando a caso.

a) Per cominciare, consideriamo i voti di un solo giurato. Qual è la probabilità che tale giurato dia una delle sue preferenze al candidato 1?

b) Consideriamo addeso i voti di tutti i giurati: qual è il valore atteso (speranza) di voti per ogni candidato?

c) Calcolare la probabilità che tutti i giurati votino per il candidato 1.

d) Dire se gli eventi:
A_1 = tutti votano per il candidato 1
A_2 = tutti votano per il candidato 2
sono indipendenti.

e) Se X_i è la variabile aleatoria che conta i voti per il candidato i, dire se le variabili X_1, X_2 sono indipendenti.

R:a) Ci sono $\binom{50}{2}$ possibilità di voti per il giurato, tra quali 49 favorevoli a X. Quindi la probabilità è $49/\binom{50}{2} = 1/25$. Oppure si risolve in modo elementare: Il giurato può votare il candidato nella prima delle sue preferenze, con probabilità $1/50$ o come seconda preferenza, con probabiltà $(49/50) * (1/49) = 1/50$, quindi in definitiva la probabilità che il giurato voti il candidato 1 è $1/25$.

b)Se ogni giurato votasse casualmente avremmo una binomiale di parametri $n = 20$ (il numero dei giurati) e $p = 1/25$ (trovato precedentemente).

Allora il valore atteso è $B(20, 1/25) = 20 * 1/25 = 20/25 = 4/5$.

c)$P(B(20, 1/25) = 20) = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{25}\right)^{20} \left(\frac{24}{25}\right)^{0} = (1/25)^{20}$

d) L'evento $A_1 \cap A_2$ è l'evento che tutti gli giurati votino allo stesso modo. La sua probabilità è $1/\binom{50}{2}^{20}$. Questo non è il quadrato di $(1/25)^{20}$, quindi gli eventi sono dipendenti.

e) No, perchè già gli eventi $\{X_1 = 20\}$ e $\{X_2 = 20\}$ sono dipendenti.

Es 2. Al buio cerco la chiave del mio ufficio in un mazzo di 10 chiavi tutte della stessa fattura. Ovviamente metto da parte le chiavi provate. Sia X il numero di chiavi che devo provare per trovare la chiave giusta.

a) Quanto vale la probabilità di controllare almeno 4 chiavi?

b) Qual è la probabilità di trovare la chiave giusta entro il 3 tentativo?

c) Se anche il secondo tentativo è fallito, quanto vale la probabilità di trovare la chiave giusta al quarto tentativo?

d) Come cambiano le risposte ai punti a) e c) precedenti se le chiavi sono tutte legate ad un portachiavi ad anello e quindi non posso mettere da parte le chiavi già provate?

R a) Per controllare almeno tre chiavi vuol dire che la prima chiave non è giusta (prob=9/10), così come la seconda (prob=8/9) e la terza (prob. 7/8) Quindi

$$P(X \geq 4) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{10}.$$

b) La probabilità richiesta è quella che una variabile ipergeometrica con 9 chiavi sbagliate e una corretta, con 3 estrazioni sia uguale ad 1, oppure il complementare della probabilità che la stessa variabile sia uguale a 0, che avevamo già calcolato al punto precedente, quindi

$$P(H(10,1,3)=1)=1-P(H(10,1,3)=0)=\frac{3}{10}$$

c) Abbiamo che $P(X=4|X>2)=\frac{P(X=4\cap X>2)}{P(X>2)}=\frac{P(X=4)}{P(X>2)}=\frac{\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7}}{\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}}=\frac{1}{8}$.

O, più semplicemente, si considera che sono rimaste 8 chiavi e che falliamo il terzo tentativo e abbiamo successo al quarto

d) Se non posso togliere le chiavi gli esperimenti sono tutti indipendenti e la probabilità di successo è 1/10. Allora la variabile X è una variabile geometrica. Quindi

$$P(X\geq 4)=P(X>3)=(1-1/10)^3=729/1000$$

e

$$P(X=4|X>2)=P(X=4)/P(X>2)=\frac{(1-1/10)^3\cdot 1/10}{(1-1/10)^2}=9/100$$

Es 3. Una macchina ha tre stati possibili, indicati dai numeri 1,2 e 3. Mentre i primi due stati possono essere osservati anche esternamente, allo stato 3 non corrisponde nessuna variazione apparente. Si riescono quindi, con le osservazioni a conoscere le transizioni $q_{1\to 1}=1/3$, $q_{1\to 2}=1/3$, $q_{2\to 1}=1/2$, $q_{2\to 2}=1/2$, $q_{3\to 1}=0$ e $q_{3\to 2}=1/2$.

a) Sapendo che il processo corrisponde ad una catena di Markov, si riesce a ricostruire tutta la matrice di transizione? Nel caso si rappresenti anche tale catena con un grafo

b) Si calcolino le marginali X_1 e X_2 (ovvero dopo una e due iterazioni) sapendo che allo stato iniziale X_0 la macchina si trova certamente nello stato 2.

c) Dato il costo $f=(1/2;0;1)$ si calcoli il costo totale atteso $E(f(X_1)+f(X_2))$ sapendo che allo stato iniziale la macchina si trova certamente nello stato 2.

d) Si trovi (se esiste) una distribuzione invariante per la catena di Markov.

R a) Visto che $\{q_{1\to j}\}_j$ è una densità di probabilità si ha $\sum_j q_{1\to j}=1$, e quindi $q_{1\to 3}=1/3$. Si procede analogamente ottenendo la matrice di transizione

$$Q=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

b) Dalle ipotesi si ha $X_0=(0,1,0)$, quindi

$$\begin{aligned}X_1&=X_0\cdot Q=(1/2;1/2;0)\\ X_2&=X_0\cdot Q^2=X_1\cdot Q=(1/6+1/4;1/6+1/4;1/6)\\ &=(5/12;5/12;1/6)\end{aligned}$$

c) Abbiamo, considerando i risultati del punto precedente.

$$\begin{aligned} E(f(X_1)) &= X_0 \cdot Q \cdot f = 1/4 \\ E(f(X_2)) &= X_0 \cdot Q^2 \cdot f = 5/24 + 1/6 = 3/8 \end{aligned}$$

Il costo totale è 1/4+3/8=5/8.

d)Per trovare la distribuzione invariante μ risolviamo $(Q^\tau - I)\,\mu = 0$, ovvero

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = 0.$$

La somma delle righe e 0, quindi il determinante della matrice è 0 e la distribuzione invariante esiste. Per trovare l'autovettore associato a 1, risolviamo

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 = 0 \\ \frac{1}{3}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_2 = \frac{4}{3}\mu_1 \\ \mu_3 = \frac{2}{3}\mu_1 \end{cases}$$

(due equazioni bastano, perchè sono linearmente dipendenti). Quindi, come inoltre dobbiamo avere $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, la sola possibilità è

$$\mu = (1/3; 4/9; 2/9).$$